ном моделировании конечного участка бесконечного пространства. – Томск, 2007. – 230 с.

А. Г. Фролов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Alexander_ksu@mail.ru

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ГРАДИЕНТНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Задача поиска собственных волн слабонаправляющего волновода сводится к спектральной задаче поиска таких значений параметров χ и λ, при которых существуют ненулевые функции u [1], удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u + \chi^2 u = -\lambda p^2 u, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \tag{2}$$

На границе Γ справедливы следующие условия сопряжения:

$$u^+ = u^-, \quad \partial u^+/\partial \nu = \partial u^-/\partial \nu, \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

Амплитуда u должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\phi), \quad |x| \geqslant 1. \tag{4}$$

Здесь использованы безразмерные параметры

$$p^2(x) = (n^2(x) - n_\infty^2)/({n_+}^2 - n_\infty^2), \quad k^2 = R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0,$$

$$\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - (\beta R)^2}, \quad \lambda = k^2 \left({n_+}^2 - n_\infty^2\right).$$

где $x = (x_1, x_2) \in R^2$, n — показатель преломления внутри волновода, n_+ — его максимальное значение, n_∞ — показатель преломления окружающей среды, причём $0 < n_\infty < n_+$.

Методами теории потенциала задача (1) - (4) сводится к спектральной задаче для интегрального оператора [1]. Эту задачу удобно формулировать не для функции u, а для функции $v(x) = u(x)p(x)$,

$$v(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} \Phi(\chi; x, y) p(x) p(y) v(y) dy, \tag{5}$$

здесь $\Phi(\chi; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi|x - y|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $x, y \in R^2 \backslash \Gamma$. Оператор $T : L_2(\Omega) \to$ $\to L_2(\Omega)$, определяемый правой частью равенства (5), является компактным, а в случае, когда $\mathrm{Im}\chi > 0$, $\mathrm{Re}\chi = 0$, — самосопряжённым и положительно определённым.

Справедлива следующая

Теорема. *Для любого χ, такого что $\chi = i\sigma$, где $\sigma > 0$, существует счётное множество характеристических чисел λ_i, $i = 1, 2, ...$, с единственной точкой накопления на бесконечности.*

Для численного решения задачи применим метод коллокации [2]. Проведём триангуляцию области: $\Omega_N = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Omega_k \subseteq \Omega$. Затем выберем базисные функции φ_k как характеристические функции для каждого треугольника Ω_k. Функцию v будем искать в виде линейной комбинации

$$v^N \approx \sum_{k=1}^{N} v_k \varphi_k, \quad v_k = v(\xi_k), \tag{6}$$

где ξ_k – центр тяжести треугольника Ω_k. Учитывая представление функции (6), запишем равенство (5) в точках ξ_i, $i = \overline{1, N}$. Тогда получим алгебраическую задачу на собственные значения

$$v_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j, \quad i = \overline{1,N}, \quad a_{ij} = \int_{\Omega_j} \Phi(\chi; \xi_i, y) p(\xi_i) p(y) dy. \quad (7)$$

Запишем задачу (7) в матричном виде

$$v^N = \lambda A_N(\chi) v^N. \quad (8)$$

Задача (8) решалась двумя способами. В случае, когда $\chi = i\sigma$, что соответствует поверхностным волнам, получаем линейную спектральную задачу для нахождения λ при каждом σ. При фиксировании λ получаем нелинейную задачу относительно χ. Этот случай соответствует вытекающим собственным волнам. Доказана сходимость метода, а в случае поверхностных волн доказано, что порядок сходимости равен 2. Выполнена серия вычислительных экспериментов. Результаты вычислений подтвердили эффективность метода на практике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Даутов Р.З. *Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 271 с.

2. Vainikko G. *Multidimensional weakly singular integral equations.* – Springer, 1993. – 366 p.